古典力学における解の一意性と安定性 (力学系の理論とその応用)

AUTHOR(S):

豊田, 利幸

数理解析研究所講究録
443巻 1981年 102-116

古典力学における解の一意性と安定性

名大 教養 豊田利幸

本稿は研究会における筆者の「古典力学における数学的諸問題——物理学者の視点から——」と題する講演の後で行われた討論およびその後入手したいくつかの論文を参照して，講演草稿を書き改めたものである。それに伴って表題も多少変更した。予めお断りしておく次才である。

§1 はじめに

物理学は複雑多岐にわたる自然現象を「法則」を媒介にして統一的あるいは包括的に理解把握しようとする学問である。そのさい「自然は数学で書かれた本である」とGalileoは言い，彼はEuclidの原論をその範とした。しかし，物理学の理論構成は数学のそれとは，かなり異なるように思われる。前者の公理論的構築は望ましく，これまでしばしば試みられたが，まだ完全に成功したものはない。

ところで基本的な物理法則とは何であるか？　その最重要なものの一つとされているのはGalileoの相対性原理と呼ばれているものである。それは次のような文章であらわされる。「物理法則は相互に等速運動を行っている2人の観測者に共通な形であらわされなければならない。」

この要請に答える「力学法則」の記号的表現がNewtonの運動方程式と呼ばれる微分方程式であることは周知の通りである。ここには，等速運動という時空の構造に関する重要な概念や，観測という物理の根幹にかかわる操作概念が内在的に含まれている。このことに最初に気付いたのはEinsteinであった。

しかし，歴史的に見ると，Newtonの運動方程式はそれがGalileo変換に対してもつ意味よりも，微分方程式のもつ一つの側面，すなわち因果律や決定論に多大の哲学的関心が払われてきた。Newtonの運動方程式のもつもう一つの側面は，運動の局所的な（local）性質から全体像を把握する具体的処方を与えたことである。これら二つの点は，物理学である限り，われわれ人間の経験範囲を考慮に入れて再検討する必要があろう。これについては§2で論ずる。

常微分方程式の解の存在および一意性の条件は，Newton以後Cauchy，Lipschiz，Peano等によって次第に整備さ

れてきたが，その間物理学者の間には，Newton の運動方程式こそあらゆる物理学の基礎であり，因果律が真理記述の規範である，という信仰に近い考え方が定着し，その適用限界が長く忘れられていた。この傾向は，Newton の運動方程式が特殊相対論的に修正された後も残った。さらに，微視的世界の情報の論理的把握のため，Newton 力学がその上に構築されている古典的な論理の枠組（Boolean lattice）からの脱却が必要となり，より広い論理の枠組として weakly modular orthocomplemented lattice が使われ，かつ確率概念が導入されて量子力学が構成されるに及んでも，依然として，基礎になるのは微分方程式である Schrödinger 方程式であるとされてきた。

しかし，Newton の運動方程式にせよ，Schrödinger 方程式にせよ，微分方程式として解析的に厳密に解ける場合は非常に限られており，実際に解く場合には，適当な近似を行うか，数値計算に頼らざるをえないことが多い。それどころか，非線形の場合は解の存在や一意性を厳密に論ずることは今なお非常に困難である（例えば Navier-Stokes の方程式）。

ところで，運動方程式は時間を実変数とする微分方程式であらわされているが，そこでは時間の連続性が仮定されている。これは明らかにわれわれの物理的経験を超えた仮説であ

るといわねばならない。どのような手段を用いようとも，われわれが直接観測しているのは離散的な時系列だからである。極限操作は近似方法に安心感を与え，また離散的な数の相互関係を理解する上で，連続量の借用が便利なことはしばしばある。しかしながら，用いられた連続量に物理的意味を与えるためには，物理学理論の基礎にまで踏み込んだ考察が必要である。湯川秀樹の素領域理論は時空構造に一種の離散化を導入する試みであり，筆者も保江邦夫とその数学的定式化を企てたことがある。[1)]

さて周知のように，最近では電算機の普及によって，微分方程式を差分方程式になおして数値計算を遂行することが効率的に可能になり，これまで予想もしなかった物理系のいくつかの性質が明らかにされてきた。その中には，Kd-V 方程式のように，以前解析的厳密解がえられていたものもあるが，いわゆる chaos のように，離散化することによって始めてその特性が顕在化したものも多い。これについては§3でその一例を物理的立場から論ずる。

一方，物理的（あるいは工学的）対象が複雑かつ大規模な system である場合，これをいくつかの subsystems にわけ，個々の subsystem が決定論的に作動する自律系であるとし，それらの複合によってもとの system の機能，とくに安定性

を解明しようという研究が，制御理論の分野で活溌になされている。これと常微分方程式の離散化との関係について，ささやかな私見を§4で述べる。

§2 因果律と安定性

closed system の中の変数の値がある時刻に与えられれば，その後の任意の時刻における変数の値は一意的にきまる。この信仰は celestial spheres における conjunction（合）や eclipse（蝕）の経験から出ている。これに反し，地上の世界では caprice（気まぐれ）や chaos（渾沌）が支配的である，と人々は考えていた。Newton の運動法則は前者を確証しただけでなく，地上の世界でもかなりの成功をおさめたかに見える。しかし，地上の世界における自然現象を精細に観測するようになるにつれ，とくに原子の世界に踏み込むようになって，Newton の運動方程式はほとんどその有効性を失った。そこでは確率概念が本質的な役割を果す。

以上述べたことは，いわば常識であるが，ここであえて次の設問を考えてみよう。「Newton 力学を根幹とする古典力学は果してあらゆる場合に予測を可能にするか？」 この問は量子力学の開拓者の一人 Max Born が提出したものである。[2] 彼は物理学者としてこの問題を考えるために，人間の経

験範囲の *time scale* を次のように比較した。宇宙の年令は地球の公転周期で数えれば 10^9 であり，一方，基底状態の水素原子内電子は1秒間に約 10^{16} 回 回転している。この点からいえば，天体運動の方が原子世界より経験年数がはるかに短い。短い経験年数でえられた知識を，それより長い時間で起る現象に適用するのは危険ではないか？

彼はまた，本来の因果律は安定性，より正確には *dynamical stability*，と関係させて考えるべきであると主張する。*dynamical stability* を簡単な場合について定義すると次のようになる。初期条件の幅を Δx_0，Δv_0，終状態の幅を Δx，Δv とした場合，

$$\Delta x < M \Delta x_0, \quad \Delta v < M \Delta v_0$$

を満すある定数 M が存在すれば，この運動は安定であり，そうでなければ不安定である。これは物理的にみて妥当な定義のように思われる。

そこで1粒子が x 軸上自由に運動していて，両端で完全反射される場合を考えてみよう。計算するまでもなく，phase spaceで考えれば，この運動は不安定であり，一意性は長時間たてば完全に失われる。図1はそれを示したもので，両端の影響は P，Q で折り畳めばよい。*Liouville* の定理により A，B，C の面積は等しいが，その形は x 軸方向にどんど

ん伸び，ある時間後には区間全体に拡がる。

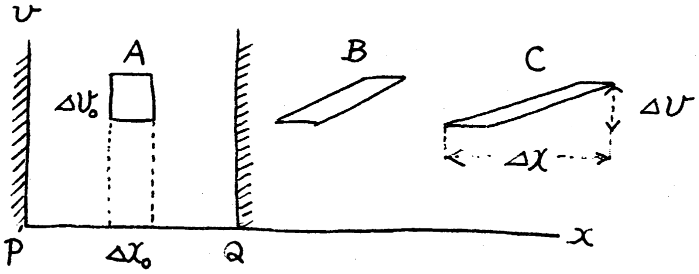

図 1

もう一つ例をあげよう。半径 r_A の粒子Aが静止している半径 r_B の粒子に衝突する場合を考える。粒子はともに剛体で表面は滑かとする。散乱距離，散乱角をそれぞれ l, 2θ であらわし，散乱は完全反射で行われるとすると，

$$\theta = \sin^{-1}\frac{l}{r_A + r_B}$$

がえられる。l を初期条件にとると $l \longrightarrow r_A + r_B$ で θ は急激に変る。r_B が非常に小さいと $l \approx r_A$ でなければ衝突は起らないし，起った場合もその散乱角はほとんど予測できない。（パチンコはこの性質を利用したものである。）

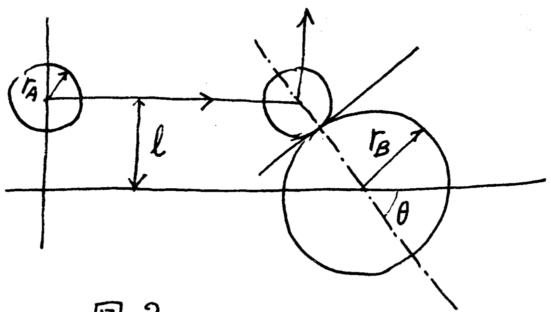

図 2

従来，古典力学の数学的研究は天体力学に端を発し，3体問題の解を直接的に求めることを断念し，topologically に解の性質，とくに安定性を調べることに研究の重点が移ってきているように思われる。しかし物理学者としてはむしろ古典的な問題である解の一意性の必要十分条件に関心がある。すなわち

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \qquad (x,t)\in D\subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$$

がただ1つの解をもつための必要かつ十分な条件は $f(x,t)$ に具体的にどのような条件を課することなのか？　この問題は岡村博によってはじめて完全に解かれ，彼はその条件を流体のモデルで説明している。[3] それは物理学者にとっても興味深いものであるだけに，より直観的な説明を望んでいるのは筆者だけではあるまい。古典力学においても前に例示した質点や剛体球の衝突には力として Dirac の δ 関数的なものを考えねばならず，この問題が通常の意味での解の一意性をもつか，筆者の知る限り，まだ解明されていない。

§3　数理生態学と微分方程式

簡単な例として処女生殖を行う生物を考え，時刻 t における個体数を u_t であらわす。その生物は餌を食べて成長し，

生れてからT時間後に生殖年令に達し，死ぬ迄にε_0個の子を産むとする。もし，u_t個が同時に生れ，かつ同時に生殖活動を行うならば，

$$u_{t+T} - u_t = \varepsilon_0 u_t \qquad (1)$$

である。しかし，どのように条件を整えようとも，多数の生物の出産，成長，および生殖をそのようにcontrolすることはできないから，個数u_tのfluctuationは避けられない。そのさいの物理的なfluctuationのunitは何であるか？ もし，その生物が完全に独立に出産，成長，生殖を行うならば，fluctuation unitは明らかに1である。しかし，実際にはそれらの行動について個体間に何らかの相関関係があるからfluctuation unitは一般に1ではない。

さて，(1)のε_0は1世代Tの間の増殖をあらわすから，

$$\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon_0}{T} \qquad (2)$$

を定義すると便利である。そうすれば(1)は

$$\frac{u_{t+T} - u_t}{T} = \varepsilon u_t \qquad (3)$$

となる。われわれが観測する時間の尺度に較べてTが十分小さいときは$T = \Delta t$とおいて(1)を

$$\frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} = \varepsilon u_t \qquad (4)$$

と書くことができるが，この式は本来 stochastic な式であり，一定の fluctuation unit をもつことを忘れてはならない。fluctuation unit を無視してよいような time scale と大きな個体数を考える場合のみ，(4) は決定論的性格をもつ微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon u \qquad (5)$$

でよく近似することができるのである。

従来，数学者が物理学や生物学であらわれる微分方程式を論ずる場合，ともすると，このような基本的性格が見落されがちである。一例をあげれば，粘性流体の基本方程式とされる Navier-Stokes の方程式が数学的に厳密に調べられることはたしかに非常に有難いことであるが，Navier-Stokes の方程式自身はいくつかの物理的近似によって導かれたものであり，基本原理そのものではない。[4)]

以上述べたことを念頭において，個体数の密度が増えるに従って増殖率が減少することを加味した logistic 方程式

$$\frac{du}{dt} = (\varepsilon - hu)\, u \qquad (6)$$

について考えてみよう。

微分方程式(6)は初期値 $u_0>0$ を与えれば一意的に解け

$$u(t)=\frac{\varepsilon C e^{\varepsilon t}}{1+hCe^{\varepsilon t}},\quad C=\frac{u_0}{\varepsilon-hu_0} \tag{7}$$

となるが，これが一定の限界のもとでの近似的な意味しかもちえないことは，式(6)そのものがすでにそのような制約のもとで導かれたものであることから，いまや明らかである。では生物学的に *substantial* な方程式は何であるか？

それは(6)の *prototype* ともいうべき

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t}=\varepsilon\left(1-\frac{h}{\varepsilon}u_n\right)u_n \tag{8}$$

であろう。これは

$$x_n\equiv\frac{h\Delta t\,u_n}{1+\varepsilon\Delta t},\quad a\equiv 1+\varepsilon\Delta t$$

とおくことによって

$$x_{n+1}=a x_n(1-x_n) \tag{9}$$

なる *one-parameter* 差分方程式に帰着される。

差分方程式(9)において a が重要な役割を果すであろうことは，(8)を導いたさいの生物学的意味から容易に推察される。すなわち，Δt が個体の平均寿命をはるかに越してお

れば，もとの式(8)は決定論的な意味を全く失うであろうし，平均寿命と増殖率の積 $\varepsilon\Delta t$ の値によって周期的な現象が起ることも考えられる。このことは Robert May の研究によって明らかにされ，数学的には T.Y. Li と J.A. Yorke によって証明され，さらに山口昌哉と俣野博によって一般化され厳密な証明が与えられた。[5),6)]

この人たちの研究，とくに山口を中心とする人々のそれは多くの物理学者にとって極めて教訓的である。それは差分方程式の性質，とくに解の一意性の問題に新しい光をあてただけでなく，従来，物理学者が金科玉条にしてきた「微分方程式から出発することこそ，最も基本的な行き方である」という考え方に痛打を与え，その微分方程式のよって立つ本質的な物理的意味を問い返えす貴重な機縁を与えた。

§4　複合系の安定性

物理学の研究対象は巨視的系，微視的系を問わず，一般に複雑である。それどころか，最近では巨視的世界と微視的世界の接点すら重要な問題になってきている。量子力学における観測理論はその典型的な例である。一方，そういう複雑な系をモデル化して人工的な系を作り，その dynamics とくに安定性を研究する方法が，工学上の必要性もあって，最近，

急速に進んできた。

この場合，与えられた複合系をいくつかの subsystem に分割して，その結合の様態を調べる方法が有用である。すなわち，もとの系をその機作がよくわかっている subsystem にうまく分割できるならば，それら離散個の subsystem の結合の dynamics として，全体の系の安定性を調べることができるはずである。

この点に関し，制御理論では well-posedness という概念が用いられている。well-posedness とは subsystem がうまく結合されていて，もとの複合系が一意的な解をもち，それが大域漸近安定になることをいう。その詳細については，文献 7) 8) を参照されたい。ここで私がとくに興味をもつのは，もとの複合系の dynamics が形の上では連立差分方程式になっている点である。

well-posedness を理解するために，文献 8) があげている well-posed でない結合系を考えてみよう。それは図 3 のように 2 台の analogue 加算機を結合したものである。

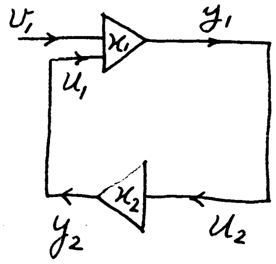

図 3

式であらわすと

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = -x_1 u_1 - v, \\ y_2 = -x_2 u_2 \end{array}\right. \qquad (10)$$

となる。ここで $u_1 = y_2$, $u_2 = y_1$ であるから $x_1 x_2 \neq 1$ ならば,(10) は一意的に解けて

$$y_1 = -\frac{v}{1 - x_1 x_2}, \quad y_2 = \frac{v x_2}{1 - x_1 x_2}$$

がえられるが,実際の物理系では $x_1 x_2 > 1$ の場合,回路が飽和状態になって機能しない。(10) がなぜそれをあらわさないかといえば,subsystem 1 と subsystem 2 の結合のさい,有限の時間遅れを無視しているからである。これを正しく考慮に入れれば飽和状態を説明することができる。物理現象における relaxation time を無視する"理想化"が近似への意図と裏はらの結果をもたらす例の一つである。

私は制御理論の専門家ではないから,well-posedness と安定性の関係について立ち入った議論をする資格はないが,この概念は微分方程式の離散化によって起る解の不安定性を逆の方向から解明する有効な方法を提供しているように思われる。§3 で述べた数理生態学の問題はまぎれもなく subsystem の結合系だからである。もしこのような conjecture

がすでに調べられ，両者を包括する理論が作られているならば，是非教えて頂きたいと思う。

終りにのぞみ，この報告を行う機会を与えられた名大白岩謙一教授，および有益な討論をして下さった研究会参加者各位，とくに貴重な示唆と多くの文献を送って頂いた京大山口昌哉教授，神戸大平井一正教授に心から謝意を表する次第である。

文献

1. Toshiyuki Toyoda and Kunio Yasue, *International Journal of Theoretical Physics*, 17 (1978), pp. 993-1008
2. Max Born, *Physics in my generation*, pp. 164-170, Pergamon, 1956
3. 岡村博，常微分方程式序説，河出書房，1950
   （微分方程式序説，森北出版，1969）
4. 豊田利幸，岩波講座「現代物理学の基礎１」p. 170，岩波書店，1975
5. 山口昌哉，システムと制御，25，1981，pp. 82-90
6. 山口昌哉，電気通信学会，NLP 80-29
7. 平井一正，計測と制御，~~20~~ 17，1978，pp. 42-53
8. 荒木光彦・池田雅夫，仝上，20，1981，pp. 48-55.